УДК 517.941

А. М. МОЛЧАНОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Построение примера

При изучении систем с переменными коэффициентами исследователь часто испытывает потребность в достаточно богатом классе примеров, на которых можно было бы без труда проверять гипотезы, возникающие в процессе изучения.

Ниже предложен простой класс уравнений, зависящий от пяти параметров, который позволяет строить многие полезные примеры.

Рассмотрим два матричных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dU}{dt}=\Omega U, \tag{1}$$

$$\frac{dS}{dt}=AS, \tag{2}$$

и напишем уравнение для произведения $X=US$:

$$\frac{dX}{dt}=\frac{dU}{dt}S+U\frac{dS}{dt}=\Omega US+UAS=(\Omega+UAU^{-1})X.$$

Итак, X удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX}{dt}=P(t)X, \tag{3}$$

где

$$P(t)=\Omega+U(t)AU^{-1}(t). \tag{4}$$

Положим $\Omega=\begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Тогда $U(t)=\begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$, и несложные выкладки показывают, что

$$P(t)=\begin{pmatrix}a_{11}, & a_{12}\\ a_{21}, & a_{22}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$a_{11}=\alpha\cos^2\omega t+\delta\sin^2\omega t-(\beta+\gamma)\sin\omega t\cos\omega t$; $a_{12}=(\alpha-\delta)\sin\omega t\cos\omega t+\beta\cos^2\omega t-\gamma\sin^2\omega t-\omega$;

$a_{21}=(\alpha-\delta)\sin\omega t\cos\omega t-\beta\sin^2\omega t+\gamma\cos^2\omega t+\omega$; $a_{22}=\alpha\sin^2\omega t+\delta\cos^2\omega t+(\beta+\gamma)\sin\omega t\cos\omega t$.

Резюме. Система

$$\frac{dX}{dt}=P(t)X, \tag{6}$$

где матрица $P(t)$ задается формулой (5), имеет решение $X=U\cdot S$, причем $U=\exp(\Omega t)=\begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$, а $S=\exp(At)$, так как матрицы Ω и A постоянны.

Замечание 1. Матрица $P(t)$ имеет постоянные собственные значения. В самом деле, формулу (4) можно переписать в виде $P=U(\Omega+A)U^{-1}$, так как матрица Ω перестановочна с U. Следовательно, матрица P имеет собственные значения, совпадающие с собственными значениями постоянной матрицы B:

$$B=A+\Omega=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta-\omega\\ \gamma+\omega, & \delta\end{pmatrix}.$$

Доказательство.

$$\det(P-\lambda E)=\det(UBU^{-1}-\lambda UU^{-1})=\det[U(B-\lambda E)U^{-1}]=$$

$$=\det U\cdot\det(B-\lambda E)\ \det U^{-1}=\det(B-\lambda E).$$

Замечание 2. Метод построения уравнений с переменными коэффициентами легко обобщается на случай матриц более высокого порядка.

Противоречащий пример к «методу замороженных коэффициентов»

В технических работах популярен так называемый «метод замороженных коэффициентов». Он состоит в том, что в системе вида (6) фиксируют аргумент матриц P и исследуют на устойчивость полученную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dY}{dt}=P(t_0)Y. \tag{7}$$

Если при всех значениях параметра t_0 система (7) оказывается устойчивой, делают заключение об устойчивости системы (6).

Покажем, что это заключение неправильно. Рассмотрим следующий пример: $A=-\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $\Omega=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

Тогда матрица B имеет треугольный вид $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ и ее собственные числа отрицательны. Так как собственные числа $P(t)$ совпадают с собственными числами B, то все системы (7) при любых значениях t_0 будут устойчивы.

Между тем система (6) не устойчива, так как ее решение есть произведение унитарной матрицы U на решение системы (2), которая в нашем примере не устойчива: $\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$; $\lambda^2+3\lambda-4=0$, так ее характеристическое уравнение имеет два корня разных знаков: $\lambda_1=1$; $\lambda_2=-4$.

Идея примера очевидна. «Метод замороженных коэффициентов» накладывает ограничения (в нашем случае) только на матрицу B. Если вращение Ω не очень велико, то системы A и B одновременно устойчивы или неустойчивы. Однако при большой скорости вращения система A может потерять устойчивость. В нашем примере оказалось достаточно угловой скорости 2.

Ясно, что можно построить много разных примеров и даже найти условия — достаточно малая скорость вращения, при которых устойчивость системы A вытекает из устойчивости B.

Противоречащий пример к схеме усреднения

Встречается еще одна ошибка. Двойственным к «методу замороженных коэффициентов» является метод усреднения, при котором систему с периодическими коэффициентами заменяют усредненной системой

$$\frac{dZ}{dt}=CZ, \tag{8}$$

где $C=\frac{1}{T}\int\limits_0^T P(t)dt$, и судят об устойчивости (6) по устойчивости (8).

Приведем простой пример неустойчивой системы (6), усредненная система которой имеет матрицу C равной нулю. Усредняя по периоду T, $T=2\pi/\omega$, матрицу $P(t)$, получаем

$$C=\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\delta}{2} & \frac{\beta-\gamma}{2}-\omega \\ \frac{\gamma-\beta}{2}+\omega & \frac{\alpha+\delta}{2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь матрицу A вида

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & \varkappa+\omega \\ \varkappa-\omega & -\alpha \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Это значит, что параметры α, $\varkappa$ и ω произвольны, а величины β, γ и δ выражаются через них: $\beta=\varkappa+\omega$; $\gamma=\varkappa-\omega$; $\delta=-\alpha$.

Любая матрица A вида (7) порождает матрицу $P(t)$, среднее от которой равно нулю.

Устойчивость системы (3) определяется устойчивостью системы (2), так как решения X и S отличаются только унитарным множителем U. Собственные значения матрицы A

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \varkappa+\omega \\ \varkappa-\omega & -\alpha-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \lambda^2-\alpha^2-\varkappa^2+\omega^2=0$$

всегда имеют разные знаки: $\lambda_1=\sqrt{\alpha^2+\varkappa^2-\omega^2}$, $\lambda_2=-\sqrt{\alpha^2+\varkappa^2-\omega^2}$. Поэтому если корни действительны, то система обязательно не устойчива.

Интересно, что в этом примере высокая скорость вращения делает вывод об устойчивости правильным, так как корни λ_1 и λ_2 становятся чисто мнимыми. Поэтому «метод замороженных коэффициентов» и «метод усреднения», употребляемые без надлежащей осторожности, приводят к ошибкам в дополнительных (противоположных) условиях.

Статья поступила в редакцию 4 декабря 1968 года.